

## 一、為什麼要參加數學競賽

- 1.從數學競賽考試過程吸取學習經驗
- 2.有利於發掘和培育青少年數學人才
- 3.有利於激發學生學習數學的興趣，形成鍥而不捨的鑽研精神和科學態度。
- 4.有利於促進學生求真、求善、求美，在智力競賽活動中，發展豐富的情感，互助合作，團隊意識，鍛鍊堅忍不拔，敢於挑戰、創新的意志和品質。
- 5.有利於提高學生的數學能力
- 6.有利於數學教育的改革和發展、師資的培育。

## 二、數學競賽可以提高哪些數學能力

美國的數學課程標準，提到 6 項數學能力：

(1)數的運算能力 (2)問題解決能力 (3)邏輯推理能力 (4)數學連結能力 (5)數學交流能力 (6)數學表達能力。國際數學競賽也同樣注重這些能力的培養，命題不但要注重選手的基本能力，也要注重選手的創造能力。

**1.基本能力：**觀察能力、聯想能力、運算能力、抽象概括能力、邏輯推理能力、書寫表達能力，這 6 項能力是構成分析問題、解決問題的基礎，也是數學競賽命題首須追求的目標。

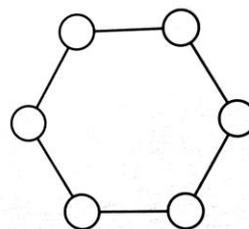
**2.創造能力：**數學家狄隆涅教授曾說：“重大的科學發現，與解答一道好的奧林匹亞試題的區別，僅僅在於解一道奧林匹亞試題需要花費 5 小時，而取得一項重大科研成果則需要花費 50 萬小時”，由此可見，解決高水準的數學問題，從事數學研究工作，其性質等同於其他自然科學的研究發展，對於科學的進步發展，同樣不可或缺的！要解決高水準的數學問題，非具備數學創造能力不可，包括：(1) 數學想像能力 (2) 數學直覺能力 (3) 數學猜測能力 (4) 數學轉換能力 (5) 數學構造能力。

### 範例

#### 1.數字謎：

(1)在正六邊形的小圓圈內填入 1,2,3,4,5,6 (數字不重複) 使任意三個相鄰的三個數字之和大於 9?若可以辦到,請填入；若不可以辦到，請說明理由。

答：可以 (1-6-3-2-5-4)



(2)有 8 張卡片蓋牌放在桌子上，每張卡片上都有一個數，從第 3 張起，每張卡片上的數都是前兩張數的和；已知第 4 張卡片上的數是 12，第 8 張的數是 81。求：第一張卡片上的數是多少？

答案：2

			12				81
--	--	--	----	--	--	--	----

## 2.巧算問題

(1)計算： $\frac{2025}{1 \times 2} + \frac{2025}{2 \times 3} + \frac{2025}{3 \times 4} + \frac{2025}{4 \times 5} + \dots + \frac{2025}{2024 \times 2025} =$

答案：2024

(2) 計算： $(\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41}) \times (\frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \frac{1}{51}) - (\frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41} + \frac{1}{51}) \times (\frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \frac{1}{41}) = ? \frac{1}{561}$

答案：1/561

(3)計算： $1+2-3-4+5+6-7-8+\dots+2017+2018-2019-2020+2021 =$

答案：1

## 3.比例問題

(1)某書局第一季與第二季的銷售量如右表：

	文學類：科學類
第一季	7：5
第二季	5：3

已知文學類和科學類書籍總銷售量第一季是第二季的 2 倍，且科學類書籍第一季比第二季多賣 660 本；請問：文學類書籍第一季共賣出多少本？

答案：1680 本

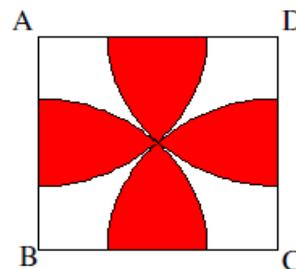
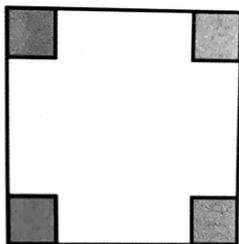
(2)輝達買了一杯 600 c.c 的檸檬水，包裝上註明果汁含量 10%，他喝掉 20% 後發覺太酸，自行加入 120 c.c 的白開水；請問加水之後的檸檬名原汁占檸檬水的比例為多少%？

答案：8%

(3)將一個裝滿水的容器倒出  $\frac{1}{2}$  的水量，再倒出剩餘水量的  $\frac{1}{3}$ ，接著又倒出剩下水量的  $\frac{1}{4}$ ，按照同樣步驟，依此類推…，總共必須要倒出幾次才能使容器內剩餘的水量恰等於原先水量的  $\frac{1}{10}$ ？ 答案：9 次

## 4.圖形問題：

(1)如左下圖，在邊長 5 公分的四個角落，分別剪去一個邊長 1 公分的正方形；請問：在剩下的白色區域內能放入最大的正方形面積是多少平方公分？ 答案：15 cm<sup>2</sup>



(2)如右上圖，ABCD 為正方形，對角線  $AC=BD=20\text{cm}$ ，現在分別以 A、B、C、D 四點為圓心，畫  $\frac{1}{4}$  圓弧，如右上圖所示。求圖中陰影部分的總面積為多少  $\text{cm}^2$ ？

(圓周率以 3.14 計算) 答案：114  $\text{cm}^2$

### 5.逆推問題

(1)中午 12 點過後不久,分針與時針成  $55^\circ$  角,帥虎外出吃午餐,一會兒回家時驚訝發現,分針與時針仍然成  $55^\circ$  角。請問:外出吃午餐花了幾分鐘時間?

答案：45 $\frac{5}{11}$

(2)在 5 點到 6 點之間,彥好看手錶時不慎將分針和時針看反了;造成她所看的時間比正確的時間大約提早 55 分鐘。請問:她誤看的時間比正確的時間實際上提早幾分鐘?

答案：55 $\frac{5}{13}$

### 6.比大小問題

(1)數學遊戲要求學生們從  $\{1,2,3,\dots,n\}$  連續的自然數中任選偶數個相異的整數,將它們兩兩配對相減(大—小),然後將所有的差值相乘。若乘積等於 2025,請問  $n$  的最小可能值是什麼? 答案：10

(2)在分數  $\frac{28}{43}$  的分子與分母各加上不同的兩個正整數  $a$ 、 $b$  之後,約分得到另一個分數  $\frac{7}{12}$ ,試求  $a+b$  的最小值為多少? 答案：24

### 7.樣式與規律問題

(1)求有一個正整數的數列,它的第一項是 7,第二項是 4;接下去的各項每一個數都是前面兩項的數字之乘積的個位數字。請問這個數列的第 2025 項是多少? 答案：8

(2)可口可樂公司為了環保,提倡飲料罐回收措施:規定 3 個空罐可以換 1 罐原裝可樂,胡歌掏錢買了 100 罐可口可樂請粉絲,喝完後拿空罐去換可樂,又喝完再拿空罐去換可樂...如此下去,請問他總共可以讓粉絲們喝了幾罐可樂?

答案：149 瓶

(3)把 25 分拆成若干個正整數之和,使其乘積為最大值  $K$ ;則  $K$  值是多少?

答案： $3^7 \times 2^2 = 8748$

### 8.奇偶數

(1)已知甲乙丙丁戊五人各有若干個金幣,請依據下列敘述判定出正確的選項:

(一)甲乙丙丁的金幣總數之和是奇數

(二)甲乙丁戊的金幣總數之和也是奇數

(三)丙丁戊的金幣總數之和仍是奇數

請問正確選項是:

(A) 甲乙同奇或同偶 (B) 丙是奇 (C) 丙戊是一奇偶 (D) 丁必是奇 (E) 戊必是偶

答案：D

(2)在  $1^2、2^2、3^2、\dots、1999^2$  正整數中，十位數上的數碼是奇數的數總共有幾個？

答案：400 個

### 9.工程問題

(1)有一項工程讓甲乙兩人輪流施工，已知甲獨做需要 9 小時，乙獨做需要 12 小時；現在規定甲、乙、甲、乙...的順序輪流去施工，每次施工 1 小時，則這項工程需要多少小時才能完成？如果改成「乙、甲、乙、甲...」的順序輪流去施工，每次施工 1 小時」是否答案一致？ 答案：10.25 小時，不一致

(2)某南極探勘隊發現 A,B 兩種稀有礦石，蘊藏量 A 礦石 565 公噸，B 礦石 500 公噸；船運公司受僱要一次將兩種礦石運往冶煉廠提煉，該公司有甲乙兩種貨輪合計 30 艘，已知甲貨輪一次最多可裝 A 礦石 20 公噸，B 礦石 15 公噸；乙貨輪一次最多可裝 A 礦石 15 公噸，B 礦石 25 公噸；問：船運公司共有多少種調派貨輪的方法？ (3 種)

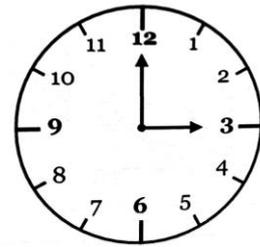
解析：甲貨輪  $x$  艘，乙貨輪  $(30-x)$  艘

$$A \text{ 礦 } 20x+15(30-x) \geq 565 \implies x \geq 23$$

$$B \text{ 礦 } 15x+25(30-x) \geq 500 \implies x \leq 25$$

所以  $(23,7)(24,6)(25,5)$  三種

### 練習題：



1.  $\frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square\square} + \frac{\square}{\square\square} = 1$ ，填入數字 1~9，不能重複。

答案： $\frac{5}{34} + \frac{7}{68} + \frac{9}{12}$

2.左圖時鐘剛好指著 3 點鐘；再過  $k$  分鐘後，時針與分針距離 12 點鐘方向的相距夾角度數相同，但兩針並未重疊；求  $k$  的最小值。 答案： $\frac{540}{13}$

3.已知  $\frac{3}{7} = 0.428571428571\dots$  有循環節 428571 六位，這六位數碼之和等於 2；

請問： $\frac{1}{17}$  的循環節有 16 位，求這 16 位的數碼和是多少？ 答案：72

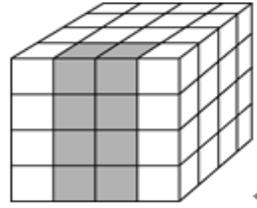
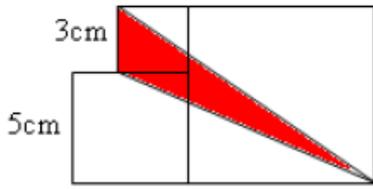
4.三個正整數 143，378，490 被  $\star$  去除得到的餘數各為  $a, b, c$ ，已知  $a:b:c=1:2:6$ 。試求除數  $\star=?$  答案：46

5.皮卡丘騎自行車沿筆直公路等速前進；他發現每隔 8 分鐘迎面開來一輛公車，且每隔 10 分鐘從後面開來一輛同款式的公車。若自行車與公车的分速均是固定的，且發車時間的間隔也是固定的，問：公车的發車間隔時間為\_\_\_\_\_分鐘。 答案： $\frac{80}{9}$

6.美華皮包內有 8 張紙鈔，其中 1000 元有 2 張，剩下的都是 500 元及 100 元紙鈔；已知她去書局買了 800 元的書與 600 元的文具，結果發現千元大鈔及 500 元紙鈔各少了一張，但 100 元的鈔票數量卻是原來的 2 倍。問：美華皮包內原有多少元？ 答案：4600 元

7. 已知某個凸  $n$  邊形的最小內角  $139^\circ$ ，其他的內角恰好是連續的奇數；設定各內角度數都是整數，請問  $n$  的值是什麼？ **答案：12**

8. 將三個不同大小的正方形相連接，如下左圖所示，已知小正方形的邊長為  $3\text{cm}$ ，中正方形的邊長為  $5\text{cm}$ 。請問圖中陰影部分的面積是多少  $\text{cm}^2$ ？ **答案：16.5  $\text{cm}^2$**



9. 如右上圖，將 64 塊邊長為 1 公分的小正方體堆砌成邊長為 4 公分的實心正方體。若拿掉圖中 8 塊灰色小正方體，則新立體圖形的表面積為多少平方公分？

**答案：100  $\text{cm}^2$**

10. 肥貓生病了，必須服用一碗湯藥，媽媽為了讓他不覺得太苦，先倒  $\frac{1}{3}$  碗至另一個小杯子

(不外溢)，接著在原來的碗加白開水，讓他喝掉  $\frac{1}{3}$  後，又加滿白開水，再喝掉再加入小杯子內的湯藥，最後一口氣喝光湯藥。求：肥貓所喝的湯藥與白開水的比例是多少？

**答案：3 : 2**

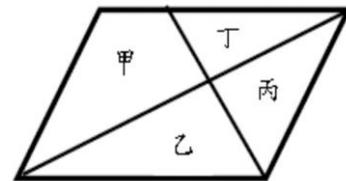
11. 求：1999 到 9991 這些四位數中所有數字之和是多少？ **答案：22222**

12. 川普騎 Ubike 沿筆直道路以每分鐘 0.9 Km 速度前進，他發現：每隔 10 分鐘迎面開來一輛公車；每隔 25 分鐘從背後開來一輛同型的公車，若公車的分速是固定且相等，發車的間隔時間也是固定的，求：公車的分速及發車的間隔時間。

**答案：每分鐘 2.1 Km； $\frac{100}{7}$  分鐘**

13. 有一數列  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ ，依此規則，則第 87 項為何？(答： $\frac{9}{13}$ )

14. 下圖為早上 9 點鐘，時針與分針的位置圖，兩針的夾角呈現 90 度角。請問：早上 9 點 30 分，時針與分針的較小夾角為多少度？ **答案：105 度**



15. 如右上圖，一個平行四邊形被分割成甲、乙、丙、丁 4 個區域。已知丙區域的面積是 8 平方公分，丁區域的面積是 6 平方公分，請問甲區域的面積是多少平方公分？

**答案：12  $\frac{2}{3}$**